

Probabilités

Série 2

Exercice 1:

On considère deux boîtes, l'une contient une bille noire et une blanche, et l'autre deux noires et une blanche. On désigne une boîte au hasard, de la quelle on tire une bille.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit noire ?
2. Si l'on sait que la bille est blanche, quelle est la probabilité que ce soit la première boîte qui ait été désignée ?

Exercice 2:

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois :

X	20	40
$P(X = x_i)$	0,25	0,75

Y	10	20	40	80
$P(Y = y_i)$	0,16	0,32	0,32	0,20

1. Calculer $E(X)$, $Var(X)$, $E(Y)$, $Var(Y)$.
2. Donner la loi de probabilité conjointe de X et Y .
3. Etablir la loi de probabilité de la variable aléatoire $T = X + Y$ et calculer $E(T)$ et $Var(T)$.
4. Etablir la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X.Y$ et calculer $E(Z)$ et $Var(Z)$.
5. Vérifier par le calcul que $Cov(X, Y) = 0$.

Exercice 3:

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en quatre classes 0, 1, 2 et 3: les excellents risques, les bons risques, les risques moyens et les mauvais risques.

Les effectifs de ces quatre classes représentent 35% de la population totale pour la classe 0, 22% pour la classe 1, 31% pour la classe 2, et 12% pour la classe 3. Soit X la variable aléatoire donnant la classe d'un client,

1. Déterminer la loi de probabilité de X , et donner sa représentation graphique,
2. Déterminer la fonction de répartition de X , et donner sa représentation graphique,
3. Calculer la moyenne et la variance de X .

Exercice 4:

Une maladie congénitale a une prévalence de 1% chez les nouveaux-nés. Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de nouveau-nés malades sur un échantillon de taille n .

1. Quelle loi suit cette variable aléatoire (justifier),
2. Donner sa moyenne ainsi que sa variance,

On enregistre dans une clinique 10 naissances durant un week-end,

3. Quelle est la probabilité pour que deux au moins de ces nouveau-nés soient atteints de la maladie,
4. Calculer $E(X_{40})$ et $Var(X_{40})$ et donner une loi que suit X_{40} approximativement,
5. Calculer $P(X_{40} = 0)$, $P(X_{40} = 1)$ et $P(X_{40} \geq 2)$

Exercice 5:

Une étude montre que 25% d'une certaine espèce de roses blanches avaient 6 pétales. Soit X le nombre de roses blanches à 6 pétales parmi 40 roses au hasard de cette population de roses.

1. Donner la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$ et $Var(X)$,
2. Déterminer la loi approchée de X et calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X \geq 2)$,

Exercice 6:

Soit X la variable aléatoire représentant le temps d'attente d'une réaction chimique (exprimé en minutes). On suppose qu'elle suit une loi exponentielle dont la densité de probabilité est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{x}{25}} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la constante λ et la fonction de répartition F de X ,
2. Donner la représentation graphique de f et F ,
3. Calculer les quartiles Q_1 , Q_2 et Q_3 ,
4. Calculer la probabilité des événements suivantes:

- Le temps d'attente est supérieure à 5 minutes,
- La réaction chimique s'effectue exactement au bout de 5 minutes,
- Le temps d'attente est compris entre 2 et 5 minutes.

5. Calculer le temps d'attente moyen et $Var(X)$.

Exercice 7:

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Déterminer les réels a , b et c qui vérifient: $P(-a < X < a) = 0,95$, $P(|X| < b) = 0,99$ et $P(|X| > c) = 0,006$

Exercice 8:

la fonction de répartition d'une variable aléatoire est donnée par: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ cx & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

1. Déterminer c et la densité de probabilité f et représenter graphiquement les fonctions f et F ,
2. Calculer $P(X < 3)$, $P(X > 1)$, $E(X)$, $V(X)$ et la médiane de X

Exercice 9:

La durée de vie en milliers d'heures d'un appareil électronique est une variable aléatoire continue X de densité:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{0,02\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{0,02}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer l'espérance et l'écart type de X en milliers d'heures,
2. Quelle est la probabilité que la durée de vie ne dépasse pas 5200 heures ?
3. Quelle est la probabilité que la durée de vie soit comprise entre 4850 et 5120 heures ?
4. Déterminer la durée de vie minimale d_m que l'entreprise peut atteindre avec une probabilité de 0,95.

Extrait de la table de la fonction de répartition $\Phi(u)$ de la loi normale centrée réduite (Valeurs arrondies)

u	0,10	0,50	1	1,2	1,5	1,645	2	2,3	2,4	2,5
$\Phi(u) = P(U < u)$	0,5398	0,6915	0,8413	0,8849	0,9332	0,9500	0,9772	0,9893	0,9918	0,9938